

## Pemetaan Konformal Daerah Banyak Segi Melalui Persamaan Kamiran Terhadap Inti Bergman dan Inti Szego (*Conformal Mapping of Polygonal Regions Using Integral Equations for Bergman and Szego Kernels*)

<sup>1</sup>Baharudin Hurmin & <sup>2</sup>Ali Hassan Mohamed Murid

Jabatan Matematik, Universiti Teknologi Malaysia, 81310 UTM Skudai, Johor, Malaysia  
Mel-e: <sup>1</sup>baharudinhurmin@yahoo.com, <sup>2</sup>ahmm@mel.fs.utm.my

**Abstrak** Satu kaedah berangka diterangkan untuk mengira pemetaan konformal bagi beberapa daerah terkait ringkas yang berbucu kepada daerah cakera unit. Kaedah berangka yang dilakukan di sini adalah berpandukan kepada persamaan kamiran Fredholm jenis kedua terhadap inti Bergman dan inti Szego. Kaedah berangka yang digunakan bagi menyelesaikan persamaan kamiran tersebut ialah kaedah Nystrom dengan petua trapezium.

**Katakunci** Persamaan kamiran, pemetaan Riemann, inti Bergman dan inti Szego.

**Abstract** A numerical method is described for computing conformal mapping from a simply connected region with corners onto the unit disk. The numerical method is based on the Fredholm integral equations for Bergman and Szego kernels. The numerical method for solving the integral equations is based on the Nystrom method with trapezoidal rule.

**Keywords** Integral equations, Riemann mapping, Bergman kernel and Szego kernel.

## 1 Pengenalan

Pemetaan konformal berangka merupakan satu alat yang penting bagi ahli sains dan jurutera terutamanya dalam menyelesaikan banyak masalah seperti dalam aerodinamik, elektrostatik, kapasitans dan lain-lain. Bagi daerah-daerah yang mudah, fungsi-fungsi pemetaan konformal boleh diperolehi dalam buku analisis kompleks. Bagi daerah-daerah yang lain seperti daerah yang berbucu, lihat Thomas [20], Papamichael dan Sideridis [13] dan juga Kythe [15].

## 2 Pemetaan Riemann

Katakan  $\Omega$  daerah yang terkait ringkas yang bukan keseluruhannya satah kompleks dan katakan  $a \in \Omega$  satu titik tetap. Maka teorem pemetaan Riemann menyatakan wujud fungsi analisis yang unik

$$R : \Omega \rightarrow \Delta = \{w : |w| < 1\}$$

yang memenuhi syarat  $R(a) = 0$ , dan  $R'(a) > 0$ . Fungsi  $R$  ini dipanggil fungsi pemetaan Riemann. Andaikan daerah  $\Omega$  disempadani oleh lengkung Jordan  $\Gamma$  mengikut lawan arah jam yang diparameterkan sebagai  $z(t)$  dengan  $0 \leq t \leq \beta$ . Jika  $z(t)$  bergerak sepanjang  $\Gamma$ , maka titik imej  $R(z(t))$  menyurih sebuah bulatan unit, iaitu

$$R(z(t)) = e^{i\theta(t)}. \quad (1)$$

Fungsi  $\theta$  dipanggil sebagai fungsi kesepadanan sempadan bagi pemetaan Riemann, lihat Henrici [4]. Jika nilai  $\theta$  diketahui, menggunakan formula kamiran Cauchy, nilai  $R$  dan nilai sonsangannya  $R^{-1}$  boleh dikira dengan menggunakan formula berikut (lihat Henrici [4], m.s 380):

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\beta \frac{e^{i\theta(t)}}{z(t) - z} z'(t) dt, \quad z \in \Omega, \quad z(t) \in \Gamma$$

dan

$$R^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta \frac{z(t)\theta'(t)}{1 - e^{-i\theta(t)}w} dt, \quad w \in U, \quad z(t) \in \Gamma.$$

Jika  $\Gamma$  berkelas  $C^2$  pada lengkung Jordan, iaitu  $\Gamma$  adalah terbezakan selanjar dua kali, maka  $R'$  boleh dilanjutkan kepada fungsi yang selanjar pada  $\bar{\Omega}$ , yang mana  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  dan  $R'(z) \neq 0$  untuk  $z \in \Gamma$ . Kerzman dan Trummer [6] ada menunjukkan bahawa fungsi pemetaan  $R$  boleh dikira pada sempadan dengan menggunakan formula

$$R(z) = \frac{1}{i} T(z) \frac{R'(z)}{|R'(z)|}, \quad z \in \Gamma \quad (2)$$

dengan  $T(z) = z'(t)/|z'(t)|$  adalah vektor tangent unit yang bernilai kompleks pada  $z(t)$  atas  $\Gamma$ . Pemetaan  $f$  dari daerah  $\Omega$  ke daerah  $G$  dipanggil analisis jika dan hanya jika ia boleh beza. Teorem pemetaan konformal juga menyatakan jika pemetaan  $f : \Omega \rightarrow G$  adalah analisis dan  $f'(z) \neq 0$  untuk setiap  $z \in \Omega$ , maka  $f$  adalah konformal.

Kita dapati teorem pemetaan Riemann tidak menerangkan sifat bagi  $R$  pada sempadan  $\Omega$  malah ia digunakan pada pemetaan daerah sahaja, terutamanya pada set terbuka yang terkait ringkas. Melalui teorem Osgood-Caratheodory, lihat Henrici [4], jika daerah  $\Omega$  adalah daerah yang terkait ringkas dan disempadani oleh lengkung Jordan  $\Gamma$ , maka  $R$  boleh dilanjutkan kepada  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ . Di sini  $R$  adalah bersifat homomorfisma dari  $\bar{\Omega}$  ke  $\bar{U}$ . Lengkuk Jordan adalah lengkuk tertutup yang mudah dan tidak bersilang di antaranya.

Pemetaan Riemann boleh juga diperolehi dengan menggunakan kaedah berangka terhadap persamaan (2) di atas. Walau bagaimanapun dalam mendapatkan pemetaan Riemann dengan menggunakan persamaan di atas akan menghadapi masalah pada bucu disebabkan vektor tangent unit pada bucu tidak dapat didefinisikan. Oleh itu terdapat beberapa pendekatan dalam kertas kerja ini untuk mendapatkan pemetaan Riemann bagi daerah yang berbucu. Pendekatan ini akan menggunakan persamaan kamiran peringkat kedua, iaitu yang berhubungan dengan inti Szego dan inti Bergman.

## 2.1 Inti Bergman

Secara amnya, inti Bergman  $B(w, z)$  adalah analisis dalam  $w$  dan  $\bar{z}$ , dan memiliki dua sifat seperti berikut:

1. Sifat Hermitian:  $B(w, z) = \overline{B(z, w)}$ ,  $w, z \in \Omega$  dan  $w \in \Omega$ ,
2. Sifat penjanaan semula: Bagi  $f$  analisis atas  $\Omega$  kita ada

$$\iint_{\Omega} B(w, z) (z) [dz] = f(w) [dz] = dx dy, \quad z = x + iy.$$

Jika  $B_{\Omega}$  dan  $B_U$  adalah inti Bergman atas  $\Omega$  dan cakera unit  $U = \{z : |z| < 1\}$  masing masing, maka Bergman [2] telah membuktikan

$$B_{\Omega}(w, z) = \sqrt{R'(w)} \sqrt{R'(z)} B_U(R(w), R(z)), \quad w, z \in \Omega. \quad (3)$$

dengan inti Bergman untuk cakera unit, iaitu

$$B_U(R(w), R(z)) = \frac{1}{\pi(1 - \overline{R(z)}R(w))^2}. \quad (4)$$

Jika  $\Gamma$  adalah lengkung Jordan berkelas  $C^2$ , maka  $B(w, z)$  selanjut atas set

$$\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} - \{(z, z) : z \in \Gamma\}.$$

Dengan memilih  $w = a$  dalam persamaan (3) dan menggunakan sifat Hermitian inti Bergman, maka kita peroleh

$$B(z, a) = \frac{1}{\pi} R'(a) \overline{R'(z)}, \quad z \in \Omega, \quad (5)$$

atau setara dengan

$$R'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{B(a, a)}} \overline{B(z, a)}. \quad z \in \bar{\Omega}. \quad (6)$$

Seterusnya kita akan dapat mencari  $R(z)$  menggunakan

$$R(z) = \sqrt{\frac{\pi}{B(a, a)}} \int_a^z B(w, a) dw, \quad z \in \Omega. \quad (7)$$

Jika  $\Gamma$  adalah lengkung Jordan berkelas  $C^2$ , maka persamaan (2) dan (5) memberikan

$$R(z) = \frac{1}{i} T(z) \frac{B(z, a)}{|B(z, a)|}, \quad z \in \Gamma. \quad (8)$$

Kita juga boleh menulis persamaan (8) sebagai

$$R(z) = \frac{1}{i} \frac{z'(t) B(z, a)}{|z'(t) B(z, a)|}. \quad (9)$$

Dengan memilih  $\phi(t) = z'(t) B(z, a)$  maka persamaan (9) boleh ditulis sebagai

$$R(z(t)) = \frac{1}{i} T(z) \frac{\phi(t)}{|\phi(t)|}. \quad (10)$$

atau

$$R(z(t)) = \frac{1}{i} \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \frac{\phi(t)}{|\phi(t)|}. \quad (11)$$

Oleh yang demikian bagi menyelesaikan masalah pemetaan Riemann adalah memadai dengan menghitung inti Bergman.

Persamaan (5) boleh diselesaikan secara berangka bagi mendapatkan pemetaan Riemann bagi daerah yang licin yang melibatkan kaedah proses ortonormal Gram-Schmidt untuk pengiraan nilai inti Bergman, (lihat Henrici [4], muka surat 549). Selalunya kaedah berangka bagi mendapatkan pemetaan Riemann dengan menggunakan kaedah proses Gram-Smith adalah tidak stabil (lihat Rabinowitz, [16]). Satu kaedah alternatif telah diberikan oleh Murid [11]. Di dalam tesisnya beliau menemui bahawa inti Bergman menepati persamaan kamiran Fredholm jenis kedua. Persamaan kamiran jenis kedua ini adalah mudah untuk diselesaikan dengan menggunakan kaedah berangka yang piawai. Persamaan kamiran tersebut, juga dinamakan sebagai kamiran Fredholm jenis kedua atas sempadan  $\Gamma$  :

$$B(z, a) + \int_{\Gamma} N(z, w) B(w, a) |dw| = -\frac{1}{\pi} \frac{\overline{T(z)}^2}{(\bar{z} - \bar{a})^2}, \text{ bagi } z \in \Gamma, a \in \Omega, \quad (12)$$

dengan

$$N(z, w) = \begin{cases} \frac{T(w)}{2\pi i} \left[ \frac{\overline{T(z)}^2}{\bar{w} - \bar{z}} - \frac{1}{w - z} \right], & w, z \in \Gamma, w \neq z \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Im}[z''(t)\overline{z'(t)}]}{|z'(t)|^3}, & w = z \in \Gamma, \end{cases} \quad (13)$$

dan  $\Gamma$  adalah daerah terkait ringkas dan mempunyai sempadan  $\Gamma$ . Persamaan (12) juga dikenali sebagai persamaan kamiran sempadan bagi inti Bergman.

Menggunakan perwakilan berparameter  $z(t)$  bagi  $\Gamma$ , dengan  $0 \leq t \leq \beta$ , persamaan kamiran (12) menjadi

$$\phi(t) + \int_0^\beta v(s, t) \phi(s) ds = \psi(t) \quad (14)$$

dan

$$\phi(t) = |z'(t)| B(z(t), a) \quad (15)$$

$$\psi(t) = -\frac{1}{\pi} \frac{\overline{z'(t)}}{\left(\overline{z(t)} - \bar{a}\right)^2}, \quad (16)$$

$$v(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ \frac{z'(t)}{z(t) - z(s)} \right], & t \neq s \\ \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left[ \frac{z''(t)}{z'(t)} \right] & t = s \end{cases}. \quad (17)$$

Inti  $v(t, s)$  yang baru ini dikenali sebagai inti parameter Neumann (Henrici [4], m.s. 394). Persamaan kamiran (14) didiskretkan menggunakan kaedah Nystrom dengan petua trapezium pada  $n$  titik nod. Maka kita peroleh

$$\phi(t_i) + \frac{\beta}{n} \sum_{j=1}^n k(t_i, t_j) \phi(t_j) = \psi(t_i), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (18)$$

Dengan mendefinisikan matriks  $M$  sebagai

$$M_{ij} = \frac{\beta}{n} k(t_i, t_j), \text{ dan } x_i = \phi(t_i), y_i = \psi(t_i),$$

maka persamaan (18) boleh ditulis sebagai sistem kompleks  $n$  persamaan linear dengan  $n$  anu

$$(I + M)x = y, \quad (19)$$

dengan  $B$  ialah matriks kompleks bersifat Hermitian-pencong. Diketahui (14) mempunyai penyelesaian yang unik, maka untuk kelas kuadratur yang agak luas maka sistem (19) juga mempunyai penyelesaian yang unik, asalkan  $n$  adalah secukup besar. Setelah penyelesaian  $x_i = \phi(t_i)$  sudah diperoleh, maka persamaan (14) akan memberikan sebuah rumus interpolasi yang cukup baik (lihat Atkinson [1]):

$$\phi(t) = \psi(t) - \sum_{j=1}^n w_j k(t, t_j) \phi(t_j). \quad (20)$$

Seandainya  $R$  ialah fungsi pemetaan Riemann, dengan membezakan persamaan (1) akan menghasilkan

$$R'(z(t)) z'(t) = i\theta'(t) e^{i\theta(t)}.$$

Oleh itu kita juga boleh tuliskan ungkapan ini dalam bentuk

$$\theta(t) = \arg(-iR'(z(t)) z'(t)). \quad (21)$$

Dengan menggunakan persamaan (15) setelah memasukkan nilai fungsi kesempadanan sempadan memberikan

$$\theta(t) = \arg(-i\phi(t)). \quad (22)$$

## 2.2 Inti Szego

Katakan  $T(z) = z'(t)/|z'(t)|$  adalah vektor tangent unit yang bernilai kompleks pada  $z(t)$  atas  $\Gamma$ . Jika  $S_\Omega$  dan  $S_U$  adalah inti Szego atas  $\Omega$  dan cakera unit  $U = \{z : |z| < 1\}$  masing-masing, maka (Bergman [2])

$$S_\Omega(w, z) = \sqrt{R'(w)} \overline{\sqrt{R'(z)}} S_U(R(w), R(z)), \quad w, z \in \Omega, \quad (23)$$

dengan inti Szego untuk cakera unit ialah

$$S_U(R(z), R(w)) = \frac{1}{2\pi(1 - \bar{w}z)}.$$

Jika  $\Gamma$  adalah lengkung Jordan berkelas  $C^2$ , maka  $S(w, z)$  selanjar atas set

$$\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} - \{(z, z) : z \in \Gamma\}.$$

Dengan memilih  $w = a$  dalam persamaan (23) dan menggunakan sifat Hermitian inti Szego, maka kita perolehi

$$S(z, a) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{R'(a) R'(z)}, \quad z \in \Omega, \quad (24)$$

atau secara setara

$$R'(z) = \frac{2\pi}{S(a, a)} S(z, a)^2, \quad z \in \Omega. \quad (25)$$

Seterusnya kita akan dapat mencari  $R(z)$  dari

$$R(z) = \frac{2\pi}{S(a, a)} \int_a^z S(w, a)^2 dw, \quad z \in \Omega. \quad (26)$$

Jika  $\Gamma$  adalah lengkung Jordan berkelas  $C^2$ , maka persamaan (2) dan (24) memberikan

$$R(z) = \frac{1}{i} T(z) \frac{S(z, a)^2}{|S(z, a)|^2}, \quad z \in \Gamma. \quad (27)$$

Persamaan (26) boleh diselesaikan secara berangka yang melibatkan kaedah proses ortonormal Gram-Schmidt untuk pengiraan nilai Szego. Tetapi kaedah ini lazimnya adalah rumit dan tidak stabil. Satu kaedah alternatif telah diberikan oleh Kerzman dan Trummer [6]. Mereka menemui bahawa inti Szego menepati persamaan kamiran Fredholm jenis kedua. Persamaan kamiran jenis kedua ini adalah mudah untuk diselesaikan dengan menggunakan kaedah berangka yang piawai. Persamaan kamiran tersebut, juga dinamakan sebagai kamiran Kerzman-Stein-Trummer (ringkasnya KST), ialah

$$S(z, a) + \int_{\Gamma} A(z, a) S(w, a) |dw| = \overline{H(a, z)} \quad \text{bagi } z \in \Gamma, \quad a \in \Omega \quad (28)$$

dengan  $\Omega$  adalah daerah terkait ringkas dan mempunyai sempadan  $\Gamma$  yang licin manakala

$$H(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{T(z)}{(z - w)} \quad \text{dengan } w \in \overline{\Omega} \text{ dan } z \in \Gamma, \quad w \neq z, \quad (29)$$

ialah inti Cauchy dan

$$A(z, w) = \begin{cases} \overline{H(w, z)} - H(z, w) & \text{jika } w, z \in \Gamma \text{ dan } w \neq z \\ 0 & \text{jika } w = z \in \Gamma. \end{cases} \quad (30)$$

Persamaan di atas juga boleh ditulis sebagai

$$A(w, z) = \begin{cases} \overline{H(z, w)} - H(w, z) & \text{jika } w, z \in \Gamma \text{ dan } w \neq z \\ 0 & \text{jika } w = z \in \Gamma. \end{cases} \quad (31)$$

Inti  $A(z, w)$  dikenali sebagai inti Kerzman-Stein dan ia adalah licin, Hermitian-pencong, iaitu  $A(w, z) = -\overline{A(z, w)}$ , dan bersamaan sifar jika  $\Omega$  adalah cakera. Inti  $A(w, z)$  adalah selanjar pada  $\Gamma \times \Gamma$ . Walaupun kedua-dua  $H(w, z)$  dan  $\overline{H(z, w)}$  tidak dapat didefinisikan pada  $z = w \in \Gamma$ , tetapi Kerzman dan Stein [7] memerhatikan bahawa perbezaannya menyebabkan nilai singularnya boleh dihapuskan. Inti Szego  $S(w, z)$  dan inti Cauchy  $H(w, z)$  adalah sama jika dan hanya jika  $\Omega$  adalah cakera.

Dengan menggunakan perwakilan berparameter  $z(t)$  bagi  $\Gamma$ , dengan  $0 \leq t \leq \beta$ , persamaan kamiran KST (28) menjadi

$$\phi(t) + \int_0^\beta k(s, t) \phi(s) ds = \psi(t) \quad (32)$$

dengan

$$\phi(t) = |z'(t)|^{1/2} S(z(t), a) \quad (33)$$

$$k(t, s) = |z'(t)|^{1/2} |z'(s)|^{1/2} A(z(t), z(s)) \quad (34)$$

$$\psi(t) = |z'(t)|^{1/2} \overline{H(a, z(t))}. \quad (35)$$

Persamaan kamiran (32) didiskretkan menggunakan kaedah Nystrom dengan petua kuadratur Gauss pada  $n$  titik nod. Maka kita perolehi

$$\phi(t_i) + \frac{\beta}{n} \sum_{j=1}^n k(t_i, t_j) \phi(t_j) = \psi(t_i) \quad 1 \leq i \leq n. \quad (36)$$

Dengan mendefinisikan matriks  $Q$  sebagai  $Q_{ij} = k(t_i, t_j)$  dan  $x_i = \phi(t_i)$ ,  $y_i = \psi(t_i)$ , maka persamaan (36) boleh ditulis sebagai sistem kompleks  $n$  persamaan linear dengan  $n$  anu:

$$(I + Q)x = y. \quad (37)$$

dengan  $Q$  adalah matriks kompleks bersifat Hermitian-pencong. Diketahui (32) mempunyai penyelesaian yang unik, untuk kelas kuadratur yang agak luas, maka sistem (37) juga mempunyai penyelesaian yang unik, asalkan  $n$  adalah secukup besar. Setelah penyelesaian  $x_i = \phi(t_i)$  diperolehi, maka persamaan (32) akan memberikan sebuah rumus interpolasi yang cukup baik (lihat Atkinson [1]), iaitu

$$\phi(t) = \psi(t) - \frac{\beta}{n} \sum_{j=1}^n k(t, t_j) \phi(t_j). \quad (38)$$

Maka menggunakan hubungan (1), fungsi kesepadanan sempadan  $\theta(t)$  berhubung dengan inti Szego, dikira melalui cara (Kerzman dan Trummer [6])

$$\theta(t) = \arg(-i\phi^2(t)z'(t)). \quad (39)$$

Dari persamaan (5) dan (24) di perolehi hubungan yang klasik diantara inti Szego dan inti Bergman, iaitu,

$$B(z, a) = 4\pi S(z, a)^2. \quad (40)$$

### 2.3 Perlaksanaan Berangka Untuk Rantau Berbucu

Dengan mendiskretkan persamaan kamiran (14) dan (32) dengan menggunakan kaedah Nystrom dengan petua trapezium dan memilih titik kollokasi yang sama jarak  $t_i = (i-1)\frac{\beta}{n}$ , maka kita peroleh

$$\phi(t_i) + \frac{\beta}{n} \sum_{j=1}^n k(t_i, t_j) \phi(t_j) = \psi(t_i) \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dengan mendefinisikan matriks  $V$  sebagai

$$V_{ij} = \frac{\beta}{n} k(t_i, t_j) \text{ dan } x_i = \phi(t_i), \quad y_i = \psi(t_i),$$

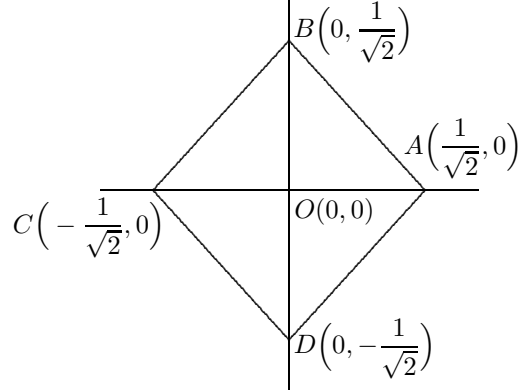
maka persamaan di atas boleh di tulis sebagai system kompleks  $n$  persamaan linear dan  $n$  anu.

$$(I + V)x = y.$$

Keseluruhan program komputer dijalankan dengan menggunakan pakej MATHEMATIKA (Wolfram [21]) dengan 16 titik perpuluhan.

## 2.4 Contoh-contoh Berangka

### Contoh 1: Daerah Segiempat



Rajah 1

Rajah segiempat di atas dapat diparameterkan seperti berikut

$$z(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + (i-1)t] & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [(2i+1) - (1+i)t] & 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [(2i-3) + (1-i)t] & 2 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [(-4i-3) + (1+i)t] & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Dari persamaan (14) kita boleh menulisnya dalam bentuk

$$\phi(t) + \int_0^1 k(t,s)\phi(s)ds + \int_1^2 k(t,s)\phi(s)ds + \int_2^3 k(t,s)\phi(s)ds + \int_3^4 k(t,s)\phi(s)ds = \psi(t)$$

Mendiskretkan persamaan tersebut memberikan

$$\begin{aligned} \phi(t_i) + \frac{\beta}{n} \left[ \sum_{j=1}^n k(t_i, t_j) \phi(t_j) + \sum_{j=n+1}^{2n} k(t_i, t_j) \phi(t_j) + \right. \\ \left. \sum_{j=2n+1}^{3n} k(t_i, t_j) \phi(t_j) + \sum_{j=3n+1}^{4n} k(t_i, t_j) \phi(t_j) \right] = \psi(t_i), \end{aligned} \quad (41)$$

dengan  $n$  adalah bilangan nod yang dipilih pada setiap sisi.

Dalam contoh ini vektor tangen pada  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$ ,  $t = 3$  tidak tertakrif. Nilai vektor tangen pada bucu-bucu tersebut  $(z_0, z_1, z_2, z_3)$  ditakrifkan sebagai purata vektor tangen dari arah sebelum dan selepas bucu.

Kita senaraikan dalam Jadual 1 ralat yang bukan pada bucu iaitu

$$\|R(z(t)) - R_n(z(t))\|_{\infty},$$

dengan  $R(z(t))$  ialah nilai sempadan sebenar dan  $R_n(z(t))$  ialah nilai penghampiran yang diperolehi.



Nilai  $n$  ialah titik nod yang dipilih disetiap sisi bagi daerah yang dipilih. Manakala kita senaraikan juga nilai pemetaan Riemann dari setiap bucu kepada cakera unit seperti dalam Jadual 2.

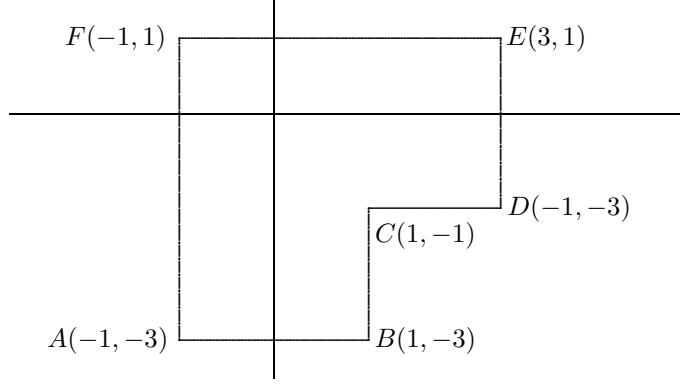
 Jadual 1: Ralat  $\|R(z(t)) - R_n(z(t))\|_\infty$  untuk  $z(t)$  bukan pada bucu

$n$	Inti Szego (S)	Inti Bergman (B)
64	$7.3677 \times 10^{-3}$	$2.33959 \times 10^{-4}$
96	$5.68633 \times 10^{-3}$	$1.82282 \times 10^{-4}$
128	$4.71647 \times 10^{-3}$	$1.51789 \times 10^{-4}$
192	$3.61436 \times 10^{-3}$	$1.16717 \times 10^{-4}$
400	$2.22364 \times 10^{-3}$	$7.20146 \times 10^{-5}$
600	$1.69845 \times 10^{-3}$	$5.50451 \times 10^{-5}$

Jadual 2: Pemetaan dari bucu ke cakera unit.

$n$	Pemetaan dari $\frac{1}{\sqrt{2}}$	Pemetaan dari $\frac{i}{\sqrt{2}}$	Pemetaan dari $\frac{-1}{\sqrt{2}}$	Pemetaan dari $\frac{-i}{\sqrt{2}}$
64	(S)	(S)	(S)	(S)
	$1 + 1.40492 \times 10^{-16}i$	$-1.60814 \times 10^{-16}i + 1i$	$-1 - 1.22461 \times 10^{-16}i$	$-1.60814 \times 10^{-16} - 1i$
	(B)	(B)	(B)	(B)
	$1 - 1.03057 \times 10^{-16}i$	$6.12303 \times 10^{-17} + 1i$	$-1 - 1.22461 \times 10^{-16}i$	$-1.60814 \times 10^{-16} - 1i$
96	(S)	(S)	(S)	(S)
	$1 - 8.68731 \times 10^{-16}i$	$6.12303 \times 10^{-17} + 1i$	$-1 + 1.22461 \times 10^{-16}i$	$-6.04903 \times 10^{-16} - 1i$
	(B)	(B)	(B)	(B)
	$1 + 4.55825 \times 10^{-16}i$	$-1.60814 \times 10^{-16} + 1i$	$-1 + 1.22461 \times 10^{-16}i$	$2.83275 \times 10^{-16} - 1i$
128	(S)	(S)	(S)	(S)
	$1 + 3.50266 \times 10^{-16}i$	$2.83275 \times 10^{-16} + 1i$	$-1 - 1.89882 \times 10^{-15}i$	$6.12303 \times 10^{-17} - 1i$
	(B)	(B)	(B)	(B)
	$1 - 5.0963 \times 10^{-16}i$	$-1.60814 \times 10^{-16} + 1i$	$-1 + 1.22461 \times 10^{-16}i$	$6.12303 \times 10^{-17} - 1i$
192	(S)	(S)	(S)	(S)
	$1 + 2.37289 \times 10^{-15}i$	$-1.60814 \times 10^{-16} + 1i$	$-1 + 1.22461 \times 10^{-16}i$	$-3.04739 \times 10^{-15} - i$
	(B)	(B)	(B)	(B)
	$1 + 8.67397 \times 10^{-17}i$	$-1.60814 \times 10^{-16} + 1i$	$-1 + 1.22461 \times 10^{-16}i$	$-1.60814 \times 10^{-16} - 1i$

Adalah jelas bahawa pemetaan Riemaan bagi daerah segiempat ke cakera unit boleh diperolehi. Dari data yang diperolehi dalam jadual menunjukkan pemetaan Riemann dari setiap bucu memetakan tepat ke kedudukan di cakera unit.

**Contoh 2: Daerah Berbentuk L**

Rajah 2

Rajah 2 di atas boleh diparameterkan seperti berikut:

$$z(t) = \begin{cases} (3-i) + 2it & 0 \leq t \leq 1 \\ (7+i) - 4t & 1 \leq t \leq 2 \\ (-1+9i) - 4it & 2 \leq t \leq 3 \\ (-7-3i) + 2t & 3 \leq t \leq 4 \\ (1-11i) + 2it & 4 \leq t \leq 5 \\ (-9-i) + 2t & 5 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Dari persamaan (14) kita boleh menulisnya dalam bentuk

$$\begin{aligned} \phi(t) + \int_0^1 k(t,s)\phi(s)ds + \int_1^2 k(t,s)\phi(s)ds + \int_2^3 k(t,s)\phi(s)ds + \\ \int_3^4 k(t,s)\phi(s)ds + \int_4^5 k(t,s)\phi(s)ds + \int_5^6 k(t,s)\phi(s)ds = \psi(t) \end{aligned}$$

Dalam contoh ini perbandingan pemetaan Riemann dibuat terhadap hasil yang diperolehi oleh Papamichael dan Sideridis [14] dan juga berpandukan dari kertas kerja Levin, Papamichael dan Sideridis [10] bagi daerah yang berbucu. Bagi daerah yang berbentuk L ini kedudukan pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit hanya mengambil kedudukan pada dua bucu sahaja sebagai perbandingan, iaitu di titik  $C$  dan  $F$ . Ini bertujuan di bucu-bucu tersebut pemetaan ke cakera unit boleh dikira dengan mudah. Ini bukan sahaja pemetaan Riemann di titik ini terhadap cakera unit diketahui melalui teori, tetapi juga diketahui melalui sifat simetri daerah tersebut. Kita akan mengambil nilai titik nod  $n = 16$  bagi setiap sisi seperti mana Papamichael dan Sideridis [14] lakukan bagi daerah yang sama.

Jadual 4 menunjukkan perbandingan pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit dengan menggunakan kaedah persamaan kamiran KST yang menggunakan inti Bergman dan inti Szego. Perbandingan dibuat terhadap pemetaan Riemann dari bucu yang dilakukan oleh Papamichael dan Sideridis [14]. Dalam menentukan pemetaan dari bucu pada daerah berbentuk L ini, Papamichael dan Sideridis [14] menggunakan persamaan yang diwujudkan

Jadual3: Pemetaan dari bucu ke cakera unit.

n	Pemetaan daripada E(3,1)	Pemetaan daripada F(-1,1)	Pemetaan daripada A(-1,3)	Pemetaan daripada B(1,3)	Pemetaan daripada C(1,1)	Pemetaan daripada D(3,-1)
48	(S) 0.984173- 0.177209i (B) 0.887195- 0.461394i	(S) -0.707107+ 0.707107i (B) -0.707127+ 0.707087i	(S) 0.177209- 0.984173i (B) 0.432204- 0.891914i	(S) 0.190052- 0.981774i (B) 0.512063- 0.838948i	(S) 0.707107- 0.707107i (B) 0.707173- 0.707041i	(S) 0.981774- 0.190052i (B) 0.318636+ 0.947877i
96	(S) 0.987221- 0.13936i (B) 0.883249- 0.504778i	(S) -0.707107+ 0.707107i (B) -0.707114+ 0.7071i	(S) 0.13936- 0.987221i (B) 0.499193- 0.866491i	(S) 0.200078- 0.97978i (B) 0.522871- 0.852412i	(S) 0.707107- 0.707107i (B) 0.707124- 0.70709i	(S) 0.97978- 0.200078i (B) -0.46907+ 0.883135i
144	(S) 0.988484- 0.151323i (B) 0.84737- 0.531002i	(S) -0.707107+ 0.707107i (B) -0.707111+ 0.707103i	(S) 0.151323- 0.988484i (B) 0.526979- 0.849878i	(S) 0.202347- 0.979314i (B) 0.526156- 0.830388i	(S) 0.707107- 0.707107i (B) 0.707114- 0.707099i	(S) 0.979314- 0.202347i (B) -0.57308+ 0.819499i
192	(S) 0.989195- 0.146604i (B) 0.835455- 0.54959i	(S) -0.707107+ 0.707107i (B) -0.707109+ 0.707104i	(S) 0.146604- 0.989195i (B) 0.546434- 0.837502i	(S) 0.203243- 0.979128i (B) 0.527735- 0.849409i	(S) 0.707107- 0.707107i (B) 0.707111- 0.707103i	(S) 0.979128- 0.203243i (B) -0.61137+ 0.791341i
288	(S) 0.989989- 0.141144i (B) 0.818319- 0.574764i	(S) -0.707107+ 0.707107i (B) -0.707108+ 0.707105i	(S) 0.141144- 0.989989i (B) 0.572635- 0.819811i	(S) 0.203955- 0.97898i (B) 0.52928- 0.848448i	(S) 0.707107- 0.707107i (B) 0.707109- 0.707105i	(S) 0.97898- 0.203955i (B) -0.64385+ 0.765148i

dari kertas kerja yang ditulis oleh Levin, Papamichael dan Sideridis [10]. Persamaannya adalah berbentuk seperti berikut:

$$f_{26}(z) = c \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=1}^4 a_n z / (z - p_n) + a_5 \{ (z - z_c)^{2/3} - (-z_c)^{2/3} \} + a_6 z \\ &+ a_7 \{ (z - z_c)^{4/3} - (-z_c)^{4/3} \} + a_8 z^2 / 2 + a_9 \{ (z - z_c)^{8/3} - (-z_c)^{8/3} \} \\ &+ a_{10} z^3 / 3 + a_{11} \{ (z - z_c)^{10/3} - (-z_c)^{10/3} \} + a_{12} z^4 / 4 \\ &+ a_{13} \{ (z - z_c)^{14/3} - (-z_c)^{14/3} \} + \sum_{n=1}^{13} a_{n+13} z^{n+4} / (n+4) \end{aligned} \right\}, \quad (42)$$

dengan  $z$  adalah nilai bucu yang dipilih dari daerah berbentuk L, dan  $z_c$  adalah kedudukan koordinat bucu pada titik  $c$ . Pekali  $a_1$  hingga  $a_n$  adalah diberi seperti dalam kertas kerja Papamichael dan Sideridis [14]. Melalui formula kuadratur Gauss-Legendre, titik nod yang dipilih di setiap sisi adalah 16 titik yang sama jarak iaitu 0.25 unit. Titik-titik  $p_1, p_2, p_3$  dan

$p_4$  adalah titik yang dipilih pada daerah tersebut. Nilai  $c = 0.410656087112 \times 10^1$  adalah pemalar yang diperolehi dari persamaan berikut,

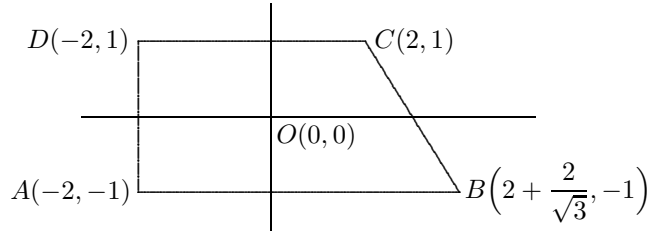
$$c = \left\{ \frac{\pi}{\operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^N a_n v'_n(0) \right)} \right\}^{1/2}, \quad (43)$$

dengan  $a_n$  adalah pekali kompleks manakala  $v_n$  ialah fungsi yang terpilih. Kriteria dalam pemilihan fungsi tersebut dan mengira pemalar  $a_n$  boleh dilihat dalam Levin, Papamichael dan Sideridis [10].

Jadual 4.:Pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit.

$n$	Kaedah	Pemetaan dari titik $C(1, -1)$	Pemetaan dari $F(-1, 1)$
$n = 16$	Bergman	$0.707124 - 0.70709i$	$-0.707114 + 0.7071i$
$n = 16$	Szego	$0.707107 - 0.707107i$	$-0.707107 + 0.707107i$
$n = 16$	Levin, Papamichael dan Sideridis	$0.707091 - 0.707091i$	$-0.707091 + 0.707092i$

### Contoh 3: Daerah Berbentuk Trapezium



Rajah 3

Rajah 3 boleh diparameterkan seperti berikut

$$z(t) = \begin{cases} [(2 + 2a - i) + (-2a + 2i)t] & 0 \leq t \leq 1 \\ [(6 + i) + (-4)t] & 1 \leq t \leq 2 \\ [(-2 + 5i) + (-2i)t] & 2 \leq t \leq 3 \\ [(-14 - 6a - i) + (4 + 2a)t] & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

dengan  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , dan  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Dalam contoh ini garis tangen pada  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$ ,  $t = 3$  tidak tertakrif. Walaupun begitu pada bucu-bucu tersebut ( $z_0, z_1, z_2, z_3$ ) nilai vektor tangen unit adalah hitung panjang vektor tangen unit dari kanan dan juga pada kiri bucu.

Perbandingan pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit dibuat bagi daerah tersebut dengan yang diperolehi oleh Papamichael dan Sideridis [14].

Dengan merujuk semula persamaan (32) kita boleh menulis persamaan kamiran KST bagi trapezium tersebut dalam bentuk

$$\phi(t) + \int_0^1 k(t, s)\phi(s)ds + \int_1^2 k(t, s)\phi(s)ds + \int_2^3 k(t, s)\phi(s)ds + \int_3^4 k(t, s)\phi(s)ds = \psi(t) \quad (44)$$

Mendiskretkan persamaan ini memberikan

$$\begin{aligned} \phi(t_i) + \frac{\beta}{n} \left[ \sum_{j=1}^n k(t_i, t_j)\phi(t_j) + \sum_{j=n+1}^{2n} k(t_i, t_j)\phi(t_j) + \right. \\ \left. \sum_{j=2n+1}^{3n} k(t_i, t_j)\phi(t_j) + \sum_{j=3n+1}^{4n} k(t_i, t_j)\phi(t_j) \right] = \psi(t_i) \end{aligned} \quad (45)$$

dengan nilai  $n$  dalam persamaan (45) adalah nilai nod yang dipilih pada setiap sisi. Jadual 5 di bawah adalah pemetaan Riemann dari setiap bucu kepada cakera unit.

Perbandingan pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit bagi daerah tersebut dengan yang diperolehi oleh Levin, Papamichael dan Sideridis [10]. Dalam kertas kerjanya mereka memilih titik nod disetiap sisi adalah  $n = 48$ . Jarak antara titik nod adalah sama jarak iaitu 0.25 unit. Jadual dibawah adalah perbandingan pemetaan Riemann dari bucu daerah trapezium ke cakera unit melalui inti Bergman, inti Szego dan terhadap pemetaan yang diperolehi oleh Levin, Papamichael dan Sideridis [10].

Jadual 6: Perbandingan Pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit.

$N = 48$	Pemetaan dari $\left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -1\right)$	Pemetaan dari $(2, 1)$	Pemetaan dari $(-2, 1)$	Pemetaan dari $(-2, -1)$
Inti Bergman	(B) 0.998739 $-0.0501997i$	(B) 0.992733 $+0.120342i$	(B) $-0.98552$ $+0.169561i$	(B) $-0.985268$ $-0.171015i$
Inti Szego	(S) 0.99934 $-0.0363309i$	(S) 0.992923 $+0.118757i$	(S) $-0.985885$ $+0.167424i$	(S) $-0.986045$ $-0.166478i$
Levin, Papamichael dan Sideridis	0.998182 $-0.0602785i$	0.992737 $+0.120303i$		$-0.985128$ $-0.171825i$

Jadual 6 menunjukan bahawa pemetaan dari bucu ke cakera unit dengan menggunakan inti Bergman lebih menghampiri pemetaan yang di perolehi oleh Papamichael dan Sideridis [14] jika dibandingkan dengan apa yang diperolehi dengan menggunakan inti Szego terhadap persamaan kamiran KST.

Dalam contoh ini perbandingan pemetaan Riemann dibuat terhadap hasil yang diperolehi oleh Papamichael dan Sideridis [14] dan juga berpandukan dari kertas kerja Levin,

Jadual 5: Pemetaan dari bucu ke cakera unit.

n	Pemetaan dari $(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -1)$	Pemetaan dari (2,1)	Pemetaan dari (-2,1)	Pemetaan dari (-2,-1)
16	(S) 0.975627+ 0.219433i (B) 0.99982- 0.0189706i	(S) 0.997512+ 0.0705014i (B) 0.999963- 0.00862569i	(S) -0.990204+ 0.139629i (B) -0.997798- 0.0663218i	(S) -0.98824-0.152912i (B) -0.999729- 0.0232642i
64	(S) 0.981846+ 0.18968i (B) 0.998421- 0.0561717i	(S) 0.993378+ 0.114895i (B) 0.992711+ 0.120515i	(S) -0.98644+ 0.164125i (B) -0.985886+ 0.167417i	(S) -0.987028- 0.16055i (B) -0.985371- 0.170422i
128	(S) 0.985025+ 0.172413i (B) 0.998614- 0.0526246i	(S) 0.993029+ 0.117868i (B) 0.992728+ 0.120376i	(S) -0.986056+ 0.166412i (B) -0.985627+ 0.168935i	(S) -0.98632- 0.164844i (B) -0.985307- 0.170792i
256	(S) 0.987863+ 0.155328i (B) 0.998844- 0.0480741i	(S) 0.992873+ 0.119177i (B) 0.992734+ 0.120328i	(S) -0.985783+ 0.168023i (B) -0.985459+ 0.169911i	(S) -0.985894- 0.167373i (B) -0.985245- 0.171152i
512	(S) 0.990302+ 0.138931i (B) 0.999162- 0.0409369i	(S) 0.992802+ 0.119771i (B) 0.992736+ 0.120311i	(S) -0.985591+ 0.169144i (B) -0.985354+ 0.170519i	(S) -0.985632- 0.168907i (B) -0.985201- 0.171403i
640	(S) 0.991002+ 0.133848i (B) 0.999283- -0.0378579i	(S) 0.992788+ 0.119884i (B) 0.992737+ 0.120308i	(S) -0.985543+ 0.169427i (B) -0.98533+ 0.170662i	(S) -0.985571- 0.169264i (B) -0.985191- 0.171463i
720	(S) 0.991355+ 0.131207i (B) 0.99935- 0.036048i	(S) 0.992782+ 0.119933i (B) 0.992737+ 0.120307i	(S) -0.985519+ 0.169563i (B) -0.985318+ 0.170729i	(S) -0.985542- 0.169433i (B) -0.985186- 0.171491i

Papamichael dan Sideridis [10] bagi daerah yang berbucu. Bagi daerah yang berbentuk trapezium, kedudukan pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit hanya mengambil kedudukan pada tiga bucu sahaja sebagai perbandingan, iaitu di titik  $A, B$  dan  $C$ . Kita akan mengambil nilai titik nod  $n = 48$  bagi setiap sisi seperti mana Levin, Papamichael dan Sideridis [10] lakukan bagi daerah yang sama.

Perbandingan dibuat terhadap pemetaan Riemann dari bucu yang dilakukan oleh Papamichael dan Sideridis [14].

Dalam menentukan pemetaan dari bucu pada daerah berbentuk trapezium ini, Papamichael dan Sideridis [14] menggunakan persamaan dari kertas kerja yang ditulis oleh Levin, Papamichael dan Sideridis [10]. Persamaan nya adalah berbentuk seperti berikut,

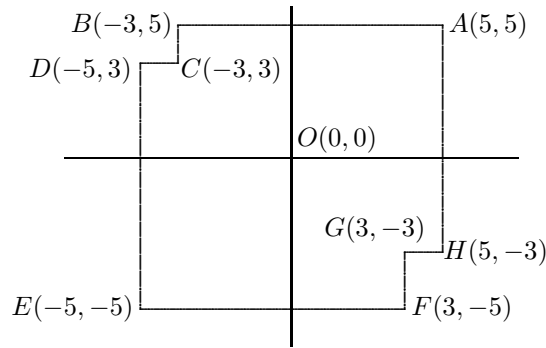
$$f_{17}(z) = c \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^4 a_n z / (z - p_n) + a_5 z + a_6 \{ (z - z_c)^{3/2} - (-z_c)^{3/2} \} \\ & + \sum_{n=1}^3 a_{n+6} z^{n+1} / (n+1) + a_{10} \{ (z - z_c)^{9/2} - (-z_c)^{9/2} \} \\ & + \sum_{n=1}^7 a_{n+10} z^{n+4} / (n+4) \end{aligned} \right\},$$

dengan  $z$  adalah nilai bucu yang dipilih dari daerah berbentuk trapezium, dan  $z_c$  adalah kedudukan koordinat bucu pada titik  $c$ . Pekali  $a_1$  hingga  $a_n$  adalah diberi seperti dalam kertas kerja Papamichael dan Sideridis [14]. Melalui formula kuadratur Gauss-Legendre, titik nod yang dipilih disetiap sisi adalah 48 titik yang sama jarak iaitu 0.25 unit. Titik-titik  $p_1, p_2, p_3$  dan  $p_4$  adalah titik yang dipilih pada daerah tersebut. Nilai

$$c = 0.398146533868 \times 10^1$$

adalah pemalar yang diperolehi dari persamaan (43).

#### **Contoh 4: Daerah Berbentuk Sisi Lapan**



Rajah 4

Dengan merujuk semula contoh dalam contoh sebelumnya bagi daerah yang berbentuk

sisi lapan, maka kita boleh mengambil semula persamaan (32) dan menulisnya dalam bentuk

$$\phi(t) + \int_0^1 k(t, s)\phi(s)ds + \int_1^2 k(t, s)\phi(s)ds + \dots + \int_6^7 k(t, s)\phi(s)ds + \int_7^8 k(t, s)\phi(s)ds = \psi(t) \quad (46)$$

mendiskretkan persamaan tersebut memberikan

$$\begin{aligned} \phi(t_i) + \frac{\beta}{n} \left[ \sum_{j=1}^n k(t_i, t_j)\phi(t_j) + \sum_{j=n+1}^{2n} k(t_i, t_j)\phi(t_j) + \dots + \right. \\ \left. \sum_{j=6n+1}^{7n} k(t_i, t_j)\phi(t_j) + \sum_{j=7n+1}^{8n} k(t_i, t_j)\phi(t_j) \right] = \psi(t_i), \end{aligned} \quad (47)$$

Selain dengan menggunakan kaedah Trapezium, kaedah kuadratur Gauss juga boleh digunakan untuk menyelesaikan persamaan kamiran KST tersebut.

Dari Jadual 8 menunjukan pemetaan dari bucu ke cakera unit dengan menggunakan inti Bergman dan inti Szego lebih baik dari yang di perolehi oleh Papamichael dan Sideridis [14]. Pemetaan tepat hanya boleh diperolehi dititik bucu yang simetri sahaja, yang mana dititik bucu tersebut kiraan boleh dibuat menggunakan  $e^{i\theta}$  dengan  $\theta$  adalah  $\frac{\pi}{2}$ .

Dalam contoh ini perbandingan pemetaan Riemann dibuat terhadap hasil yang diperolehi oleh Papamichael dan Sideridis [14] dan juga berpandukan dari kertas kerja Levin, Papamichael dan Sideridis [10] bagi daerah yang berbucu. Bagi daerah yang berbentuk sisi lapan, kedudukan pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit hanya mengambil kedudukan pada lima bucu sahaja sebagai perbandingan, iaitu di titik  $A, B, C, G$  dan  $H$ . Ini bertujuan di bucu-bucu tersebut pemetaan ke cakera unit boleh dikira dengan mudah. Ini bukan sahaja pemetaan Riemann di titik ini terhadap cakera unit diketahui melalui teori, tetapi juga diketahui melalui sifat simetri daerah tersebut. Kita akan mengambil nilai titik nod  $n = 16$  bagi setiap sisi seperti mana Papamichael dan Sideridis [14] lakukan bagi daerah yang sama.

Jadual 8: Perbandingan Pemetaan Riemann dari bucu ke cakera unit

$k = 16$	Pemetaan dari (5, 5)	Pemetaan dari (-3, 3)	Pemetaan dari (-5, -5)	Pemetaan dari (3, -3)
Inti Bergman	0.707107+ 0.707107i	-0.707107+ 0.707107i	-0.707107- 0.707107i	0.707107- 0.707107i
Inti Szego	0.707107+ 0.707107i	-0.707107+ 0.707107i	-0.707107- 0.707107i	0.707107- 0.707107i
Levin, Papamichael dan Sideridis	0.707103+ 0.707103i	-0.707108+ 0.707108i	-0.707107- 0.707107i	0.707108- 0.707108i

Dalam menentukan pemetaan dari bucu pada daerah berbentuk sisi lapan ini, Papamichael dan Sideridis [14] menggunakan persamaan dari kertas kerja yang ditulis oleh



Jadual 7: Pemetaan dari bucu ke cakera unit.

n		Pemetaan dari A(5,5)	Pemetaan dari B(-3,5)	Pemetaan dari C(-3,3)	Pemetaan dari D(-5,3)
32	(S)	0.707107+ 0.707107i	-0.490442+ 0.871474i	-0.707107+ 0.707107i	-0.871474+ 0.490442i
	(B)	0.707107+ 0.707107i	-0.612694+ 0.79032i	-0.707107+ 0.707107i	-0.79032+ 0.612694i
64	(S)	0.707107+ 0.707107i	-0.463751+ 0.885966i	-0.707107+ 0.707107i	-0.885966+ 0.463751i
	(B)	0.707107+ 0.707107i	-0.631137+ 0.775672i	-0.707107+ 0.707107i	0.775672+ 0.631137i
128	(S)	0.707107+ 0.707107i	-0.441453+ 0.897284i	-0.707107+ 0.707107i	-0.897284+ 0.441453i
	(B)	0.707107+ 0.707107i	-0.648101+ 0.761555i	-0.707107+ 0.707107i	-0.761555+ 0.648101i
256	(S)	0.707107+ 0.707107i	-0.425244+ 0.905079i	-0.707107+ 0.707107i	-0.905079+ 0.425244i
	(B)	0.707107+ 0.707107i	-0.663783+ 0.747925i	-0.707107+ 0.707107i	-0.747925+ 0.663783i
512	(S)	0.707107+ 0.707107i	-0.414303+ 0.910139i	-0.707107+ 0.707107i	-0.910139+ 0.414303i
	(B)	0.707107+ 0.707107i	-0.676797+ 0.73617i	-0.707107+ 0.707107i	-0.73616+ 0.67697i

n		Pemetaan dari E(-5,-5)	Pemetaan dari F(3,-5)	Pemetaan dari G(3,-3)	Pemetaan dari H(5,-3)
32	(S)	-0.707107- 0.707107i	0.490442- 0.871474i	0.707107- 0.707107i	0.871474- 0.490442i
	(B)	-0.707107- 0.707107i	0.612694- 0.79032i	0.707107- 0.707107i	0.79032- 0.612694i
64	(S)	-0.707107- 0.707107i	0.463751- 0.885966i	0.707107- 0.707107i	0.885966- 0.463751i
	(B)	-0.707107- 0.707107i	0.631137- 0.775672i	0.707107- 0.707107i	0.775672- 0.631137i
128	(S)	-0.707107- 0.707107i	0.441453- 0.897284i	0.707107- 0.707107i	0.897284- 0.441453i
	(B)	-0.707107- 0.707107i	0.441453- 0.897284i	0.707107- 0.707107i	0.897284- 0.441453i
256	(S)	-0.707107- 0.707107i	0.425244- 0.905079i	0.707107- 0.707107i	0.905079- 0.425244i
	(B)	-0.707107- 0.707107i	0.663783- 0.747925i	0.707107- 0.707107i	0.747925- 0.663783i
512	(S)	-0.707107- 0.707107i	0.414303- 0.910139i	0.707107- 0.707107i	0.910139- 0.414303i

Levin, Papamichael dan Sideridis [10]. Persamaannya adalah berbentuk seperti berikut,

$$f_{23}(z) = c \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^2 a_n z / \{z^2 + (-1)^n 100\} + \sum_{n=1}^2 a_{n+2} \{(z - z_n)^{2/3} - (-z_n)^{2/3}\} \\ & + a_5 z + \sum_{n=1}^2 a_{n+5} \{(z - z_n)^{4/3} - (-z_n)^{4/3}\} \\ & + \sum_{n=1}^2 a_{n+7} \{(z - z_n)^{8/3} - (-z_n)^{8/3}\} + \sum_{n=1}^{14} a_{n+9} z^{2n+1} / (2n+1) \end{aligned} \right\}$$

dengan  $z$  adalah nilai bucu yang dipilih dari daerah berbentuk sisi lapan, dan  $z_n$  adalah kedudukan koordinat bucu pada titik  $c$ . Pekali  $a_1$  hingga  $a_n$  adalah diberi seperti dalam kertas kerja Papamichael dan Sideridis [14]. Melalui formula kuadratur Gauss-Legendre, titik nod yang dipilih disetiap sisi adalah 16 titik yang sama jarak iaitu 1.00 unit. Titik-titik  $p_1, p_2, p_3$  dan  $p_4$  adalah titik yang dipilih pada daerah tersebut. Nilai  $c = 0.161338731615 \times 10^2$  adalah pemalar yang diperolehi daripada persamaan (43).

Jadual 9: Perbandingan bucu yang tak simetri.

$k = 16$	Pemetaan dari $(-3, 5)$	Pemetaan dari $(5, -3)$
Inti Bergman	$-0.648101 + 0.761555i$	$0.761555 - 0.648101i$
Inti Szego	$-0.441453 + 0.897284i$	$0.897284 - 0.441453i$
Papamichael dan Sideridis	$-0.394928 + 0.918706i$	$0.918706 - 0.394928i$

Penyelesaian persamaan kamiran dengan menggunakan petua trapezium terhadap inti Szego memberikan hasil penyelesaian yang lebih baik jika dibandingkan terhadap inti Bergman.

### 3 Kesimpulan

Penyelesaian persamaan kamiran adalah dengan menggunakan petua Trapezium dan dengan mengambil nilai vektor tangen pada bucu ditakrifkan sebagai purata vektor tangen dari arah sebelum dan selepas bucu. Keputusan ini memberikan hasil yang lebih baik terhadap inti Bergman dan inti Szego jika dibandingkan dengan keputusan yang diperolehi oleh Papamichael dan Sideridis [14]. Selain itu kaedah yang digunakan untuk mendapatkan pemetaan Riemann ini jauh lebih mudah jika di bandingkan dengan kaedah yang digunakan oleh Papamichael dan Sideridis [14].

### Penghargaan

Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Universiti Teknologi Malaysia di atas sokongan yang diberikan di atas vot 74049.

### Rujukan

- [1] K.E. Atkinson, *A survey of numerical method for the solution of Fredholm integral equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.

- [2] S.Bergman, *The Kernel function and Conformal Mapping*, 2nd (revised) ed. Providence: American Mathematical Society, 1970.
- [3] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, John Wiley Volume 1, 1974.
- [4] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, John Wiley Volume 3, 1986.
- [5] D.M. Hough & C.A. Kokkinos, *An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domain*, Numer. Math.41(1983), 287–307.
- [6] N.Kerzman & M.R.Trummer, *Numerical conformal mapping via the Szego kernel*, J.Comput. Appl. Math. 14(1986), 111–123.
- [7] N.Kerzman & E.M.Stein, *The Cauchy kernel, the Szego kernel, and the Riemann mapping function* Math.Ann. 236(1978), 85–93.
- [8] H.Kober, *Dictionary of Conformal Representations*, Dover, New York, 1957.
- [9] B.Lee & M.R.Trummer, *Multigrid conformal mapping via the Szego kernel*, Electronic transactions on Numerical Analysis 2(1994) 22–43.
- [10] D.Levin, N. Papamichael & A.Sideridis, *On the use of conformal transformations for the numerical solution of harmonic boundary value problems*, Computer Method In Applied Mechanics and Engineering, 12(1977), 201–208.
- [11] A.H.M.Murid 1997, *Integral equation approach for numerical conformal mapping*, Ph.D. thesis, Universiti Teknologi Malaysia.
- [12] A.H.M.Murid & M.R.M.Razali, *An integral equation method for conformal mapping of doubly connected regions*, Matematika Jilid 15(1999), bil 2, 79–93.
- [13] N.Papamichael & C.A.Kokkinos, *Two numerical methods for the conformal mapping of simply connected domain*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 28(1977), 285–307.
- [14] N.Papamichael & A.Sideridis *Formulae for the approximate conformal mapping of some simply connected domain*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, TR/72, Dept. of Math, and Stat., Brunel Univ., 1977.
- [15] K. Prem Kythe, *Computational conformal mapping*, New Orleans. Birkhauser, 1998.
- [16] P.Rabinowitz, *Numerical experiments in conformal mapping by the method of orthonormal polynomials*, J. Assoc. Comput. Mach.13(2)(1966), 296–303.
- [17] M.R.M.Razali, M.Z.Nashed & A.H.M.Murid, *Numerical conformal mapping via the Bergman kernel*, Journal of Computational and Applied Math. 82, 333–350.
- [18] R.Schinzinger & P.A.A.Laura, *Conformal mapping: methods and applications*, Elsevier, Amsterdam , 1991.
- [19] M.R.Trummer, *An efficient implementation of a conformal mapping method based on the Szego kernel*, Siam J. Numer. Anal. 23, 853–872.

- [20] A.D. Thomas, *Conformal mapping of nonsmooth domains via the Kerzman-Stein integral equations*, J. Math. Anal. and Appl. 200(1)(1996), 162–181.
- [21] S.Wolfram, *A system of doing mathematics by computer*, Mathematica, Addison-Wesley, Redwood City.